Geometría Euclidiana

En el siglo III AC, Euclides de Alejandría y sus discípulos escribieron *Los Elementos*, una colección de libros en los que se organizaban y expandían los conocimientos matemáticos de entonces alrededor de la geometría, dándoles una estructura lógica.

Su idea era partir de muy pocas suposiciones intuitivas y usar la lógica para deducir todo lo demás. No les bastaba que algo pareciera ser cierto, querían estar seguros y saber por que lo era. Esta es la base de todas las matemáticas modernas.

Los Elementos consisten de definiciones, nociones comunes y postulados (las cosas que se asumen como ciertas) seguidas por teoremas, construcciones y demostraciones.

Algunas definiciones:

Un *punto* es lo que no tiene partes.

Una *línea* es una longitud sin anchura.

Una *línea recta* es una línea que yace por igual respecto de los puntos que están en ella.

Si dos rectas se cortan de modo que los ángulos adyacentes son iguales, los ángulos se llaman *rectos* y las líneas se llaman *perpendiculares*.

Rectas paralelas son aquellas que, estando en un mismo plano, nunca se cruzan.

Nociones comunes:

Dos cosas que son iguales a una tercera son iguales entre si.

Si a cosas iguales se añaden cosas iguales, los resultados son iguales.

Las cosas que coinciden entre sí son iguales entre sí.

El total es mayor que una parte.

Postulados o Axiomas:

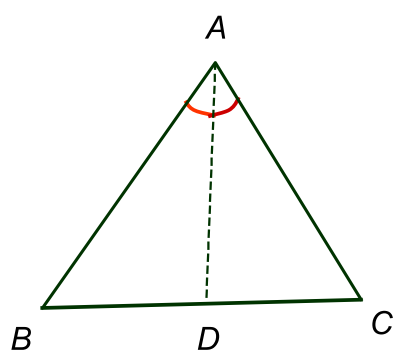
1. Por dos puntos distintos pasa una y solo una línea recta
2. Las líneas rectas pueden extenderse indefinidamente.
3. Se puede dibujar un círculo con cualquier centro y de cualquier radio.
4. Todos los ángulos rectos son iguales.
5. Si una línea recta cruza a dos líneas rectas de modo que los ángulos internos de un mismo lado suman menos que dos ángulos rectos, entonces las dos rectas se cruzarán de ese lado.

Algunos teoremas de los elementos

Proposición 1.4. (LAL) *Si dos triángulos tienen dos lados y el ángulo entre ellos iguales entonces los otros lados y los otros ángulos también son iguales.*

Demostración. Si ABC y A'B'C' son dos triángulos con AB=A'B', AC=A'C' y los ángulos BAC y B'A'C' iguales. Desplazar al triángulo A'B'C' de modo que A'B' coincida con AB, y que el ángulo B'A'C' coincida con el ángulo BAC. Entonces la linea A'C' coincide con la linea AC, así que C' coincide con C. Entonces por el postulado 1 la línea BC debe coincidir con la línea B'C', así que los dos triángulos coinciden y por lo tanto sus lados y ángulos son iguales. •

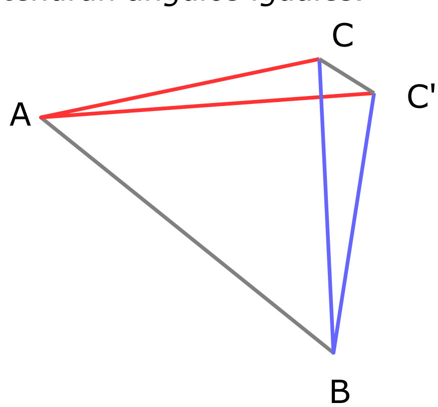
Proposición 1.5. (Pons Asinorum) *Si un triángulo tiene dos lados iguales, entonces los ángulos opuestos a esos lados son iguales.*



Demostración. Supongamos que el triángulo ABC tiene lados AB y AC iguales. Dibujar la bisectriz del ángulo BAC, y sea D el punto donde la bisectriz corta al lado BC. Entonces los triángulos ABD y ACD tienen 2 lados iguales y los ángulos entre ellos iguales.

Así que por la proposición 1.4 los ángulos ABD y ACD son iguales. •

Proposición 1:8. (LLL) *Si dos triángulos tienen los 3 lados respectivos iguales, también tendrán ángulos iguales.*



Demostración. Si ABC y A'B'C' son dos triángulos con lados respectivos iguales, podemos desplazarlos para que A' coincida con A, B' coincida con B y además C' y C queden del mismo lado del segmento AB.

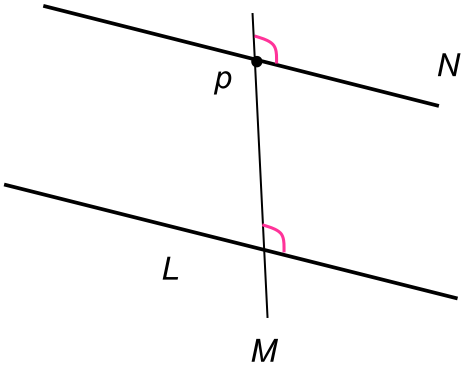
Si C' coincide con C entonces por (P1) los lados coinciden, así que los ángulos son iguales. Supongamos ahora que C' no coincide con C.

Como AC=A'C' entonces por (P1.5) ∠ACC' = ∠AC'C así que ∠AC'C > ∠BCC'.

Y como BC=BC' entonces ∠BC'C = ∠BCC' así que ∠BCC' > ∠AC'C.

Las dos desigualdades se contradicen, así que C' debe coincidir con C. •

Proposición 1:31. *Se puede construir una recta paralela a una recta dada por un punto dado.*



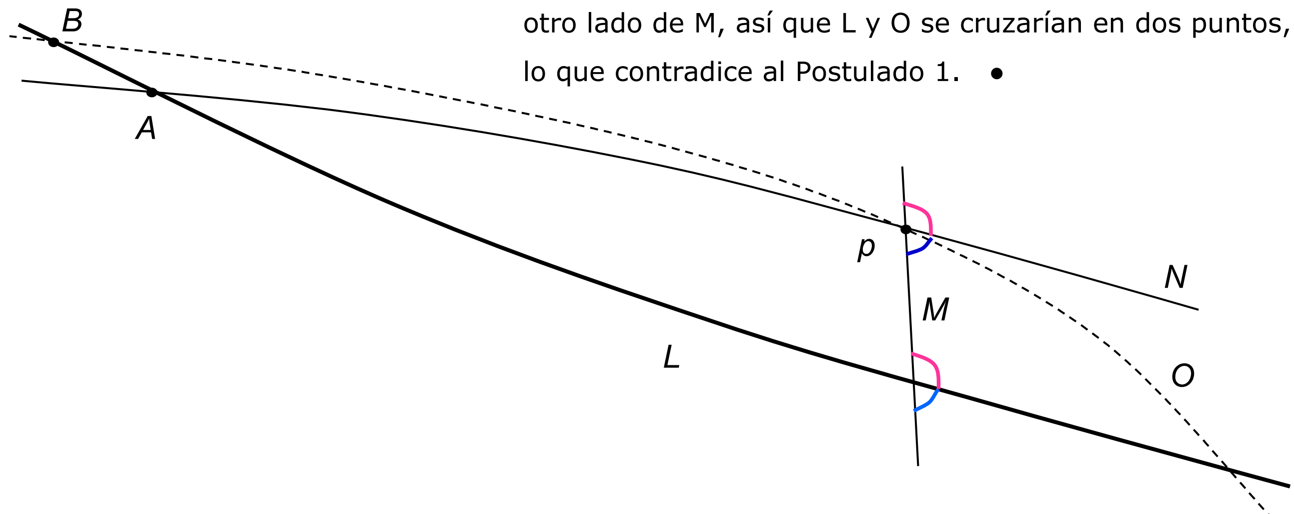
Construcción. Dada una recta L y un punto P, trazar una recta M que pase por P y cruce a L. Trazar por P una recta N que cruce a M formando un ángulo igual al que L forma con M.

Afirmación: N es paralela a L.

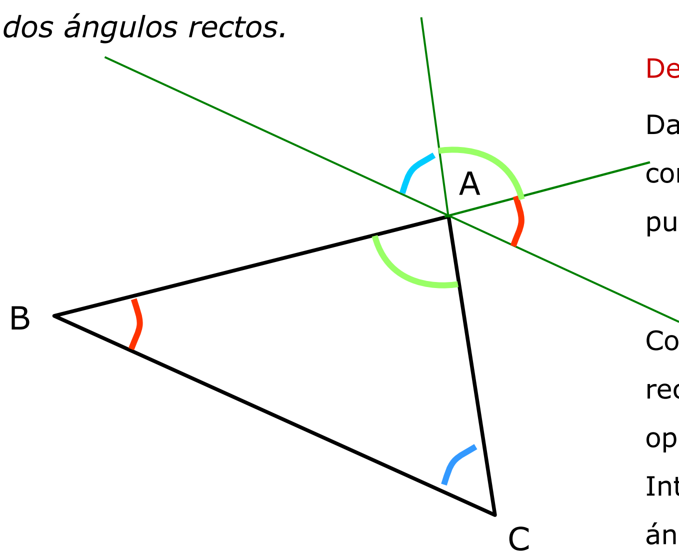
Demostración. Supongamos que L y N no fueran paralelas y se cruzaran en un punto A. Sea B un punto en L mas allá de A. Considerar la recta O que pasa por B y P.

Entonces O cruza a M formando ángulos que suman menos de dos rectos.

Entonces por (1.5) la recta O debe cruzar a la recta L del otro lado de M, así que L y O se cruzarían en dos puntos, lo que contradice al Postulado 1. •



Proposición 1:32. *En cualquier triángulo, la suma de los tres ángulos interiores es igual a dos ángulos rectos.*

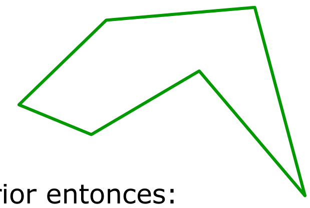


Demostración.

Dado el triángulo ABC, por (1.31) podemos construir una paralela al lado BC que pase por el punto A.

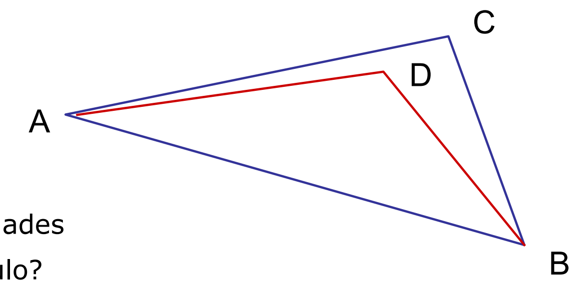
Como los ángulos que forma una recta con dos rectas paralelas son iguales y como los ángulos opuestos por el vértice son iguales, los ángulos Internos del triángulo suman lo mismo que los ángulos de un lado de una recta. •

Problemas



1. ¿Cuánto suman los ángulos internos de un polígono de n lados?

2. Demuestra que si ABC es un triángulo y D es un punto en su interior entonces:



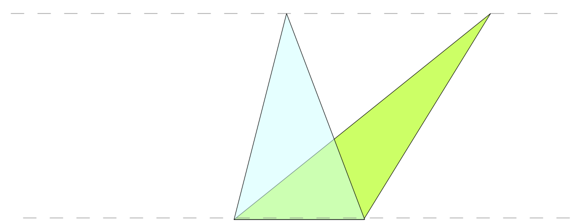
a. AD+DB < AC+CB

b. ∠ADB < ∠ACB

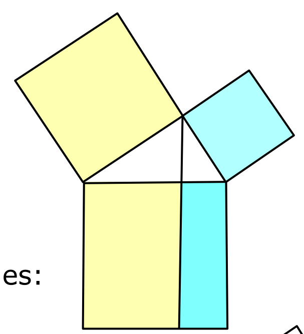
c. ¿Que pasa con las desigualdades si D esta afuera del triángulo?

Proposición 1:38 *Dos triángulos con la misma base y la misma altura tienen la misma área.*

Demostración Ejercicio (demostrar primero que dos paralelogramos con la misma base y la misma altura tienen la misma área, viendo que es posible recortar uno y usar los pedazos para armar el otro)

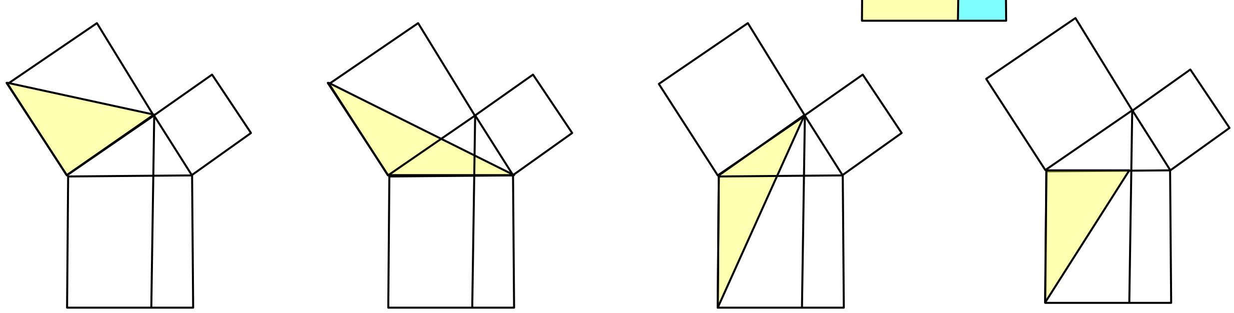


Proposición 1:47 (Teorema de Pitágoras). *En los triángulos rectángulos el cuadrado del lado opuesto al ángulo recto es igual a la suma de los cuadrados de los lados que comprenden el ángulo recto.*



Demostración Basta ver que los las áreas de los cuadrados son iguales a las áreas de los rectángulos:

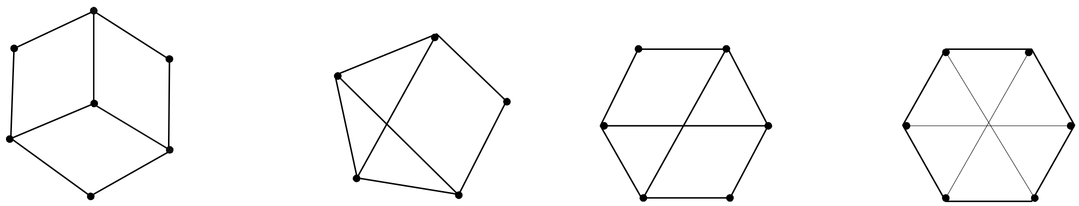
Para esto basta mostrar que los cuatro triángulos tienen áreas iguales:



(Misma base y altura) (Congruentes por LAL) (misma base y altura)

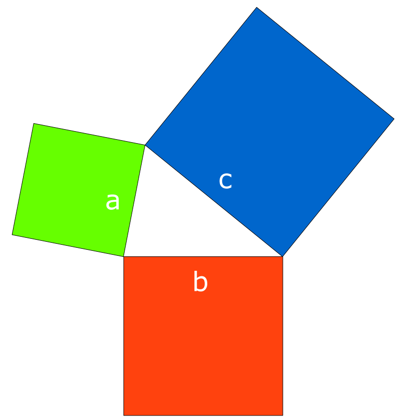
Problemas

3. Por la proposición 1.38 (LLL) los triángulos son estructuras rígidas. ¿Cuales de estas estructuras (hechas de varillas con articuladas) son rígidas?



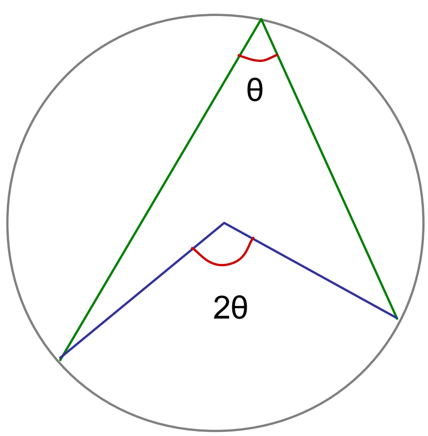
4. Demostrar el reciproco del Teorema de Pitagoras:

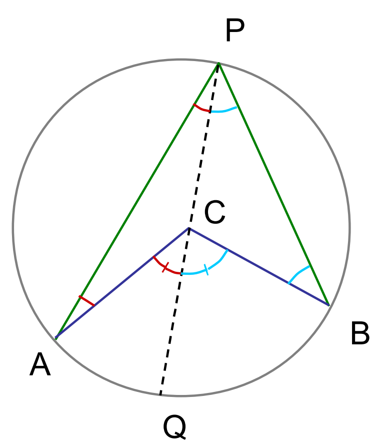
Si los lados de un triángulo satisfacen $A^2 + B^2 = C^2$ entonces el triángulo es rectángulo.
(hint: usando LLL, puede hacerse en 2 renglones)



¿Que pasa con la igualdad si el ángulo opuesto al lado C es menor que 90°? ¿Y si es mayor a 90°?

Proposición 3:20 *Un ángulo inscrito en un círculo es la mitad del ángulo central.*



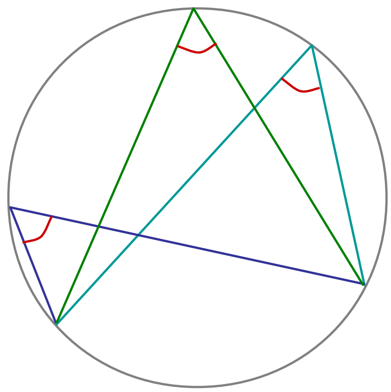


Demostración. Como ACP es isósceles entonces $\angle CAP = \angle APC$. Como la suma de los ángulos internos es 180° entonces $\angle ACP = 180° - 2\angle CAP$ y como $\angle ACP + \angle ACQ = 180°$ entonces $\angle ACQ = 2\angle CAP$.

De manera análoga ∠BCQ = 2∠CBP.

Sumando los ángulos se obtiene ∠ACB = 2∠APB.

Proposición 3:21 *En un círculo, los ángulos inscritos que ven el mismo arco son iguales entre sí.*



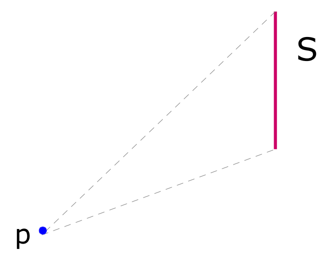
Demostración.

Todos los ángulos inscritos que ven el mismo arco son iguales a la mitad del mismo ángulo central.

Problemas

5. ¿Cuantos triángulos distintos puede haber con un área y un perímetro dados?

6. ¿Donde están todos los puntos del plano desde los cuales un segmento de recta S se ve del mismo tamaño que desde el punto p? (Dibujalos)



Para los interesados en leer mas de Los Elementos de Euclides, aqui estan en linea (en ingles):

http://aleph0.clarku.edu/~djoyce/elements/bookI/bookI.html

Una demostración de que todos los triángulos son equiláteros (en ingles):

https://www.youtube.com/watch?v=Yajonhixy4g